



流形上的稀疏低秩表示模型及应用

胡永利 huyongli@bjut.edu.cn 2020.11.8









提纲





- 1. 背景
- 2. 稀疏低秩表示模型
- 3. 流形上的低秩表示模型
 - 3.1 Grassmann流形上的低秩表示模型
 - 3.2 SPD流形上的低秩表示模型
 - 3.3 乘积流形上的低秩表示模型
- 4. 行为聚类应用









1. 背景









数据增加了44倍

2020 35 zettabytes



2009 800,000 petabytes_



北京工业大学信息学部 Faculty of Information Technology



北京人工智能研究院







1. 背景









图像视频等高维数据是大数据的主体



高维数据的有效表达和智能应用是大数据面临的一个挑战性问题





摄像头达100000多个,每天 产生1000TB的视频数据。







提纲





- 1. 背景
- 2. 稀疏低秩表示模型
- 3. 流形上的低秩表示模型
 - 3.1 Grassmann流形上的低秩表示模型
 - 3.2 SPD流形上的低秩表示模型
 - 3.3 乘积流形上的低秩表示模型
- 4. 行为聚类应用





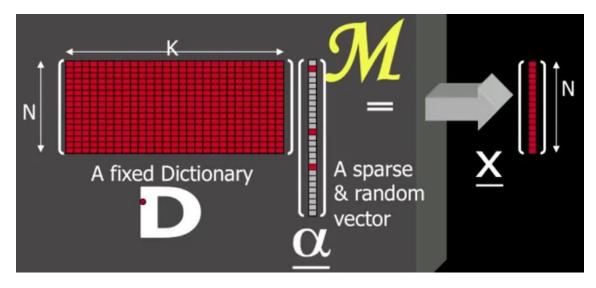








稀疏表示模型



$$\arg\min_{D,\alpha} \|x - D\alpha\|_F^2 + \lambda \|\alpha\|_0$$

E. J. Cand'es, J. Romberg and T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006







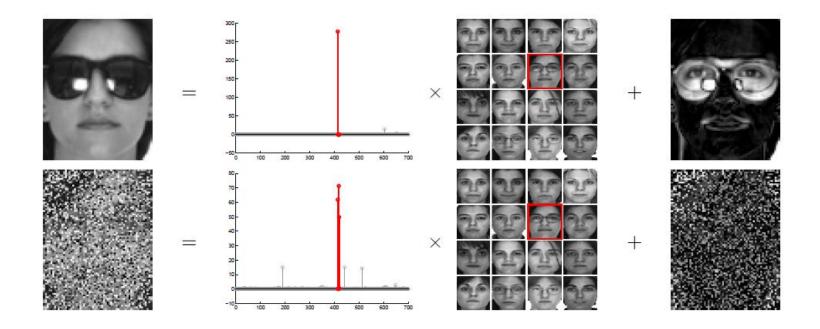








• 稀疏表示模型



Yi Ma, et al: Robust Face Recognition via Sparse Representation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2008







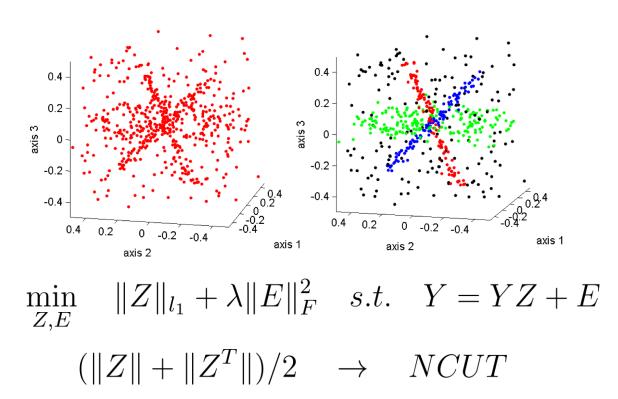








• 稀疏表示模型



• Vidal, et al: Sparse subspace clustering, *CVPR*, 2009







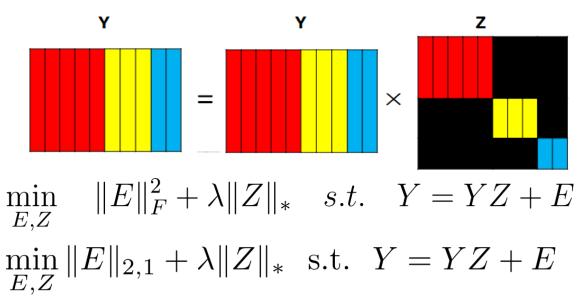








• 低秩表示模型



- Guangcan Liu, Zhouchen Lin and Yong Yu, Robust Subspace Segmentation by Low-Rank Representation, ICML, 2010
- G. Liu, Z. Lin, J. Sun, Y. Yu and Y. Ma. Robust Recovery of Subspace Structures by Low-Rank Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013.















• 序列数据的稀疏低秩表示模型

$$\min_{E,Z} \|E\|_F^2 + \lambda \|Z\|_{l_1} \quad s.t. \quad Y = YZ + E$$

$$\min_{E,Z} ||E||_{2,1} + \lambda ||Z||_* \text{ s.t. } Y = YZ + E$$



$$\min \frac{1}{X-XZ}/{\frac{2}{F}} + \lambda_1 \frac{1}{Z^T} \frac{Z}{I_1} + \frac{1}{ZR}/{\frac{1}{1.2}}$$

s.t.
$$diag(Z) = 0$$
, $Z \ge 0$

Fei Wu, YongLi Hu, YanFeng Sun, Junbin Gao, BaocaiYin. Ordered Subspace Clustering with Block-diagonal Priors. *IEEE Transactions on Cybernetics* (*TCYB*), 46(12): 3209-3219, 2016.











提纲





- 1. 背景
- 2. 稀疏低秩表示模型
- 3. 流形上的低秩表示模型
 - 3.1 Grassmann流形上的低秩表示模型
 - 3.2 SPD流形上的低秩表示模型
 - 3.3 乘积流形上的低秩表示模型
- 4. 行为聚类应用









3. 流形上的低秩表示模型





• 传统低秩表示模型给(欧氏空间)

$$\min_{E,Z} \|E\|_F^2 + \lambda \|Z\|_* \quad s.t. \quad Y = YZ + E$$

$$\|\mathbf{E}\|_F^2 = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Z}\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^N Z_{ij}\mathbf{x}_j\|^2$$

• 流形上的低秩表示模型

$$\min_{Z} \sum_{i=1}^{N} \left\| [X_i] \ominus \left(\biguplus_{j=1}^{N} Z_{ij} \odot [X_j] \right) \right\|_{\mathcal{PG}} + \lambda \|Z\|_*$$











提纲





- 1. 背景
- 2. 稀疏低秩表示模型
- 3. 流形上的低秩表示模型
 - 3.1 Grassmann流形上的低秩表示模型
 - 3.2 SPD流形上的低秩表示模型
 - 3.3 乘积流形上的低秩表示模型
- 4. 行为聚类应用

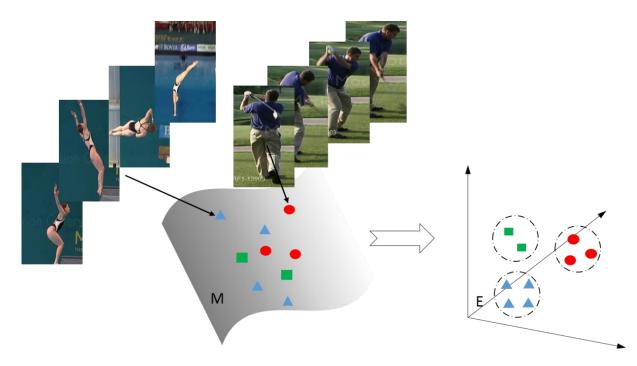












Grassmann流形具有比较完善的数学性质; Grassmann流形是数据表示和分析的常用工具; Grassmann流形能够很好的描述视频特征。









• Grassmann流形

$$\mathcal{G}(p,d) = \{ \mathbf{X} \in R^{d \times p} : \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}_p \} / \mathcal{O}(p)$$

Grassmann流形的嵌入距离

$$\Pi: \mathcal{G}(p,d) \to \operatorname{Sym}(d), \quad \Pi(X) = XX^T.$$

$$d_g^2(X,Y) = \frac{1}{2} \|\Pi(X) - \Pi(Y)\|_F^2.$$





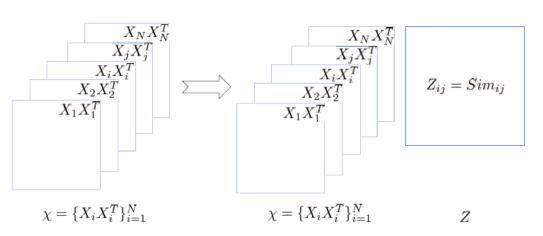






Grassmann流形上的低秩表示模型

$$\min_{Z} \sum_{i=1}^{N} \left\| [X_i] \ominus \left(\biguplus_{j=1}^{N} Z_{ij} \odot [X_j] \right) \right\|_{\mathcal{PG}} + \lambda \|Z\|_*$$



$$\Pi(X) = XX^{T}.$$

$$\delta(X_{1}, X_{2}) = \|\Pi(X_{1}) - \Pi(X_{2})\|_{F}$$

$$\min_{\mathcal{E},Z} \|\mathcal{E}\|_F^2 + \lambda \|Z\|_* \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{X} \times_3 Z + \mathcal{E}$$









目标函数: $\min_{E,Z} ||E||_F^2 + \lambda ||Z||_*$, s.t. $\mathcal{X} = \mathcal{X} \times_3 Z + E$ 求解:

1) 将张量E分解,

$$||E||_F^2 = \sum_{i=1}^N ||E_i||_F^2$$

2) 其中,第i个切片为

$$||E_{i}||_{F}^{2} = \operatorname{tr}\left[\left(X_{i}X_{i}^{T} - \sum_{j=1}^{N} z_{ij}(X_{j}X_{j}^{T})\right)^{T} \left(X_{i}X_{i}^{T} - \sum_{j=1}^{N} z_{ij}(X_{j}X_{j}^{T})\right)\right]$$

$$= \operatorname{tr}\left[\left(X_{i}X_{i}^{T}\right)^{T}\left(X_{i}X_{i}^{T}\right)\right] - 2\sum_{j=1}^{N} z_{ij}\operatorname{tr}\left[\left(X_{i}X_{i}^{T}\right)^{T}\left(X_{j}X_{j}^{T}\right)\right]$$

$$+ \sum_{j_{1}=1}^{N} \sum_{j_{2}=1}^{N} z_{ij_{1}}z_{ij_{2}}\operatorname{tr}\left[\left(X_{j_{1}}X_{j_{1}}^{T}\right)\left(X_{j_{2}}X_{j_{2}}^{T}\right)\right]$$









3) 对上式整理后得到

$$||E||_F^2 = Np - 2\text{tr}[Z\Delta] + \text{tr}[Z\Delta Z^T]$$

其中, $\Delta_{ij} = \text{tr}[(X_j^T X_i)(X_i^T X_j)]$, N 和 p 是常数。

4)误差项

$$||E||_F^2 = Np - 2\text{tr}[ZLL^T] + \text{tr}[ZL(ZL)^T]$$

= $||ZL - L||_F^2 + \text{const.}$

5)目标函数可化简为

$$\min_{Z} \|ZL - L\|_F^2 + \lambda \|Z\|_*$$

该式具有解析解。

Wang boyue, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Baocai Yin. Low Rank Representation on Grassmann Manifolds. *The 12th Asian Conference on Computer Vision (ACCV' 2014)*, Singapore, Nov. 2014.





• Grassmann流形上局部几何约束的低秩表示

$$\operatorname{Log}_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{X}_2) = \mathbf{H} = \mathbf{U} \arctan(\Sigma) \mathbf{V}^T$$

$$\min_{\mathbf{Z}} \sum_{i=1}^{N} \left\| \sum_{j=1}^{N} z_{ij} \operatorname{Log}_{\mathbf{X}_{i}}(\mathbf{X}_{j}) \right\|_{X_{i}}^{2} + \lambda \|\mathbf{Z}\|_{*} \text{ s.t. } \sum_{j=1}^{N} z_{ij} = 1, i = 1, ..., N, P_{\Omega}(\mathbf{Z}) = 0$$

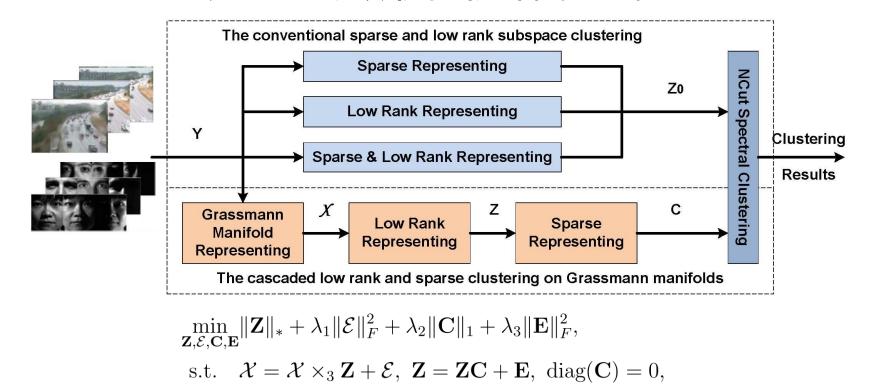
$$P_{\Omega}(w_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{if } (i,j) \in \Omega \\ w_{ij} & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \Omega = \{(i,j) : j = i \text{ or } \mathbf{X}_j \notin \mathcal{N}_i \}$$

Boyue Wang, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Baocai Yin. Localized LRR on Grassmann Manifold: An Extrinsic View. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology* (*TCSVT*). 28(10): 2524-2536 (2018).





• Grassmann流形上的级联低秩-稀疏表示模型

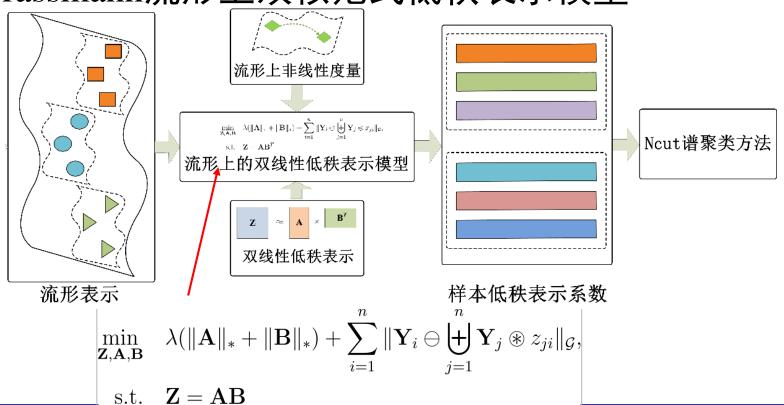


Boyue Wang, Yongli Hu, JunbinGao, Yanfeng Sun and Baocai Yin. Cascaded Low Rank and Sparse Representation on Grassmann Manifolds. **2018 International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'2018)**, 2018.





Grassmann流形上双核范式低秩表示模型

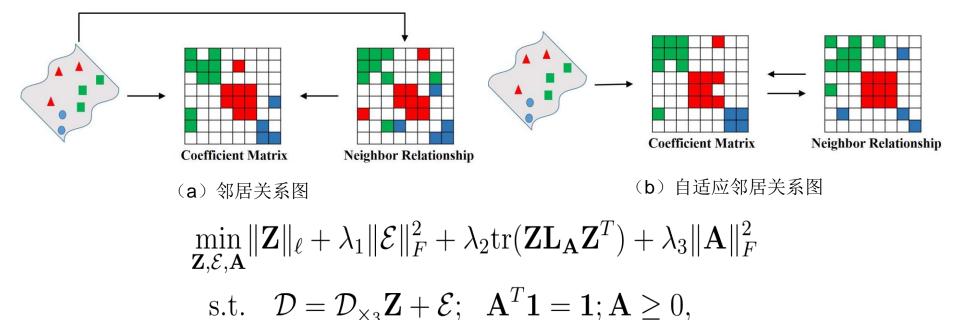


Xinglin Piao, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Baocai Yin; Double Nuclear Norm Based Low Rank Representation on Grassmann Manifolds for Clustering. *The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'2019)*, pp. 12075-12084.





Grassmann流形上自适应构建邻接矩阵的低秩表示 模型



Boyue Wang, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Fujiao Ju, Baocai Yin. Learning Adaptive Neighborhood Graph on Grassmann Manifolds for Video/Image-Set Subspace Clustering, *IEEE Transactions on Multimedia (TMM)*, 2020.2



提纲





- 1. 背景
- 2. 稀疏低秩表示模型
- 3. 流形上的低秩表示模型
 - 3.1 Grassmann流形上的低秩表示模型
 - 3.2 SPD流形上的低秩表示模型
 - 3.3 乘积流形上的低秩表示模型
- 4. 行为聚类应用







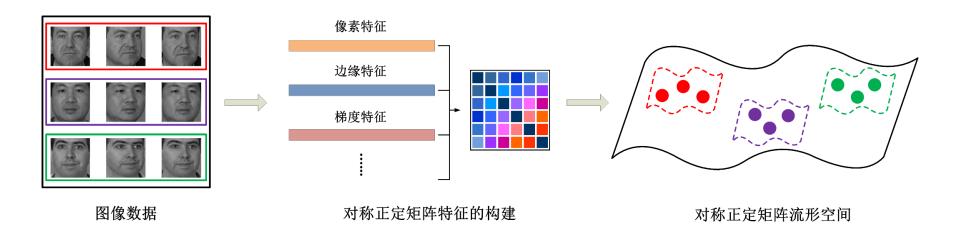






• $d \times d$ 维 SPD流形可定义为:

$$\mathcal{S}_{++}^d = \{ \mathbf{M} \in R^{d \times d} : \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \in R^d - \{0_d\} \}.$$



• SPD流形表示的构造方法:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{y}_i - \mu_{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \mu_{\mathbf{y}})^T,$$











SPD流形的几何性质和度量

给定两个SPD流形的样本点 $Y_1, Y_2 \in S_{++}^d$,则

1) SPD流形的仿射不变距离:

$$d_{AIM}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \|\log(\mathbf{Y}_1^{-1/2} \cdot \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{Y}_1^{-1/2})\|_F,$$

2) SPD流形的指数和对数映射:

$$\begin{cases} \log(\mathbf{Y}) = \mathbf{R} \cdot \operatorname{diag}(\log(\operatorname{diag}(\mathbf{\Sigma}))) \cdot \mathbf{R}^T, \\ \exp(\mathbf{Y}) = \mathbf{R} \cdot \operatorname{diag}(\exp(\operatorname{diag}(\mathbf{\Sigma}))) \cdot \mathbf{R}^T, \end{cases}$$

3) SPD流形的Log-Euclidean距离:

$$d_{LEM}^{2}(\mathbf{Y}_{1}, \mathbf{Y}_{2}) = \|\mathbf{Y}_{1}^{-1} \odot \mathbf{Y}_{2}\|_{\log}^{2} = \langle \mathbf{Y}_{1}^{-1} \odot \mathbf{Y}_{2}, \mathbf{Y}_{1}^{-1} \odot \mathbf{Y}_{2} \rangle_{\log}$$

$$= \operatorname{tr}(\log(\mathbf{Y}_{1}^{-1} \odot \mathbf{Y}_{2})^{T} \log(\mathbf{Y}_{1}^{-1} \odot \mathbf{Y}_{2}))$$

$$= \operatorname{tr}(\log(\mathbf{Y}_{2})^{T} - \log(\mathbf{Y}_{1})^{T}, \log(\mathbf{Y}_{2}) - \log(\mathbf{Y}_{1}))$$

$$= \|\log(\mathbf{Y}_{2}) - \log(\mathbf{Y}_{1})\|_{F}^{2},$$















SPD流形上基于Log-Euclidean度量的低秩表示

模型

$$\min_{\mathbf{Z}} \sum_{i=1}^{N} d_{LEM}^{2}(\mathbf{Y}_{i}, \biguplus_{j=1}^{N} z_{ij} \otimes \mathbf{Y}_{j}) + \lambda \|\mathbf{Z}\|_{*},$$

$$\lim_{\mathbf{Z}} \sum_{i=1}^{N} \|\log(\mathbf{Y}_{i}) - \sum_{j=1}^{N} z_{ij} \log(\mathbf{Y}_{j})\|_{F}^{2} + \lambda \|\mathbf{Z}\|_{*},$$

$$\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{i=1,j=1}^{N}. \quad \delta_{ij} = \operatorname{tr}(\log(\mathbf{Y}_{i})^{T} \log(\mathbf{Y}_{i}))$$

$$\min_{\mathbf{Z}} \|\mathbf{Z}\boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}}\|_{F}^{2} + \lambda \|\mathbf{Z}\|.$$

$$\min_{\mathbf{Z}} \|\mathbf{Z}\boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{Z}\|_*.$$

Boyue Wang, Yongli Hu, Junbin Gao, Muhammad Ali, David Tien, Yanfeng Sun, Baocai Yin. Low Rank Representation on SPD Matrices with Log-Euclidean Metric. *Pattern Recognition (PR)*. 76: 623-634 (2018)







• SPD流形上基于核Log-Euclidean度量的近似双核 范式低秩表示模型

$$\min_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{X}} \lambda(f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})) + \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{Y}_{i} \ominus \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{Y}_{j} \otimes z_{ji} \|_{\mathcal{M}}, \text{ s.t. } \mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{T}$$

结合Log-Euclidean和高斯核函数

$$\kappa_{\text{GK-LogE}}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \exp(-\beta \|\log(\mathbf{Y}_1) - \log(\mathbf{Y}_2)\|_F^2)$$

定义 表示SPD样本点在核空间上的关联关系:

$$\mathbf{G} = [g_{ij}] = [\kappa_{\text{LogE}}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)]$$

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{A}, \mathbf{B}} \lambda(\sum_{i=1}^{r} f(\sigma_i(\mathbf{A})) + \sum_{i=1}^{r} f(\sigma_i(\mathbf{B}))) + \operatorname{tr}(\mathbf{Z}^T \mathbf{G} \mathbf{Z}) - 2\operatorname{tr}(\mathbf{G} \mathbf{Z}), \text{ s.t. } \mathbf{Z} = \mathbf{A} \mathbf{B}^T$$

Xinglin Piao, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Xin Yang, Baocai Yin, Wenwu Zhu, Ge Li. Kernel Clustering On Symmetric Positive Definite Manifolds Via Double Approximated Low Rank Representation, **2020 IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME)**, 2020.7



提纲





- 1. 背景
- 2. 稀疏低秩表示模型
- 3. 流形上的低秩表示模型
 - 3.1 Grassmann流形上的低秩表示模型
 - 3.2 SPD流形上的低秩表示模型
 - 3.3 乘积流形上的低秩表示模型
- 4. 行为聚类应用













• 多视数据



• 乘积流形上的低秩表示

$$\begin{split} [X] &= \{X^1,...,X^M\} \\ \min_{\mathbf{Z}} \sum_{i=1}^N \left\| [\mathbf{X}_i] \ominus (\biguplus_{j=1}^N \mathbf{z}_{ij} \odot [\mathbf{X}_j]) \right\|_{\mathcal{PG}} + \lambda \|\mathbf{Z}\|_*, \end{split}$$











• 乘积Grassmann流形上的低秩表示模型

$$[X] = \{X^{1}, ..., X^{M}\}$$

$$X^{m} \in \mathcal{G}(p_{m}, d), m = 1, ..., M$$

$$\mathcal{P}\mathcal{G}_{d:p_{1}, ..., p_{M}} = \mathcal{G}(p_{1}, d) \times \cdots \times \mathcal{G}(p_{M}, d)$$

$$d_{\mathcal{P}\mathcal{G}}([X], [Y])^{2} = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2} ||X^{m}(X^{m})^{T} - Y^{m}(Y^{m})^{T}||_{F}^{2}.$$

$$\min_{\mathbf{E}, Z} ||\mathbf{E}||_{F}^{2} + \lambda ||Z||_{*} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{X} \times_{4} Z + \mathbf{E}.$$

Boyue Wang, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Baocai Yin. Product Grassmann Manifold Representation and Its LRR Models. *The 30th AAAI Conference on Artificial Intelligence* (AAAI'2016), Phoenix, USA, February 2016.







• 数据局部几何特征的Laplacian约束

低秩表示系数构建的相似度应该与原始数据的相似度保持 一致,

$$\begin{split} \min_{\mathbf{Z},\mathbf{E}} \|\mathbf{Z}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_F^2 + \beta \sum_{i,j} \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\|_2^2 w_{ij} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}_{\times_4} \mathbf{Z} + \mathbf{E} \\ \sum_{i,j} \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\|_2^2 w_{ij} = 2 \text{tr}(\mathbf{Z}^T \mathbf{L} \mathbf{Z}), \end{split}$$
其中,拉普拉斯约柬矩阵 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$,则目标函数:

$$\min_{\mathbf{E}, \mathbf{Z}} \|\mathbf{Z}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_F^2 + 2\beta \operatorname{tr}(\mathbf{Z} \mathbf{L} \mathbf{Z}^T), \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}_{\times_4} \mathbf{Z} + \mathbf{E}.$$

Boyue Wang, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Baocai Yin. Laplacian LRR on Product Grassmann Manifolds for Human Activity Clustering in Multi-Camera Video Surveillance. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology (TCSVT). 27(3): 554-566 (2017)







一般乘积流形上的低秩表示模型

$$[X] = \{X^1, ..., X^M\}$$

其中,因子流形可以是同构的,也可以是异构的

$$\min_{\mathcal{E}, \mathbf{Z}, \mathbf{w}} \sum_{m=1}^{M} w_m \|\mathcal{E}^m\|_{\mathcal{M}_m}^2 + \lambda \|\mathbf{Z}\|_*, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X}^m = \mathcal{X}^m \times_{q_m} \mathbf{Z} + \mathcal{E}^m,$$

其中, w,,是不同流形的权重。



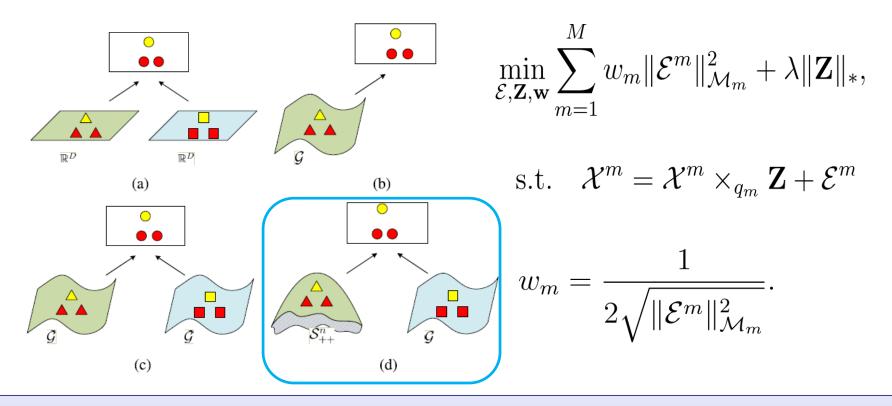








• 异构乘积流形上的低秩表示模型



Boyue Wang, Yongli Hu, Junbin Gao, Yanfeng Sun, Fujiao Ju, Baocai Yin. Adaptive Fusion of Heterogeneous Manifolds for Subspace Clustering, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems (TNNLS)*, 2020.8.



提纲





- 1. 背景
- 2. 稀疏低秩表示模型
- 3. 流形上的低秩表示模型
 - 3.1 Grassmann流形上的低秩表示模型
 - 3.2 SPD流形上的低秩表示模型
 - 3.3 乘积流形上的低秩表示模型
- 4. 行为聚类应用









4. 行为聚类应用





• Grassmann流形上的聚类: 数据表示

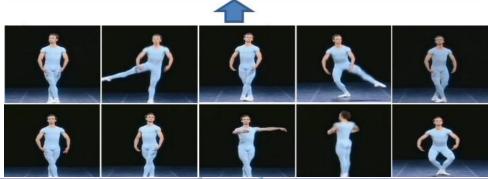
提取前个p左奇异向量得到正交矩阵 $\mathbf{X} = \mathbf{U}(:, 1:p)$



对原始数据矩阵进行SVD分解 $Y = U\Sigma V$



向量化得到原始数据矩阵Y











4. 行为聚类应用



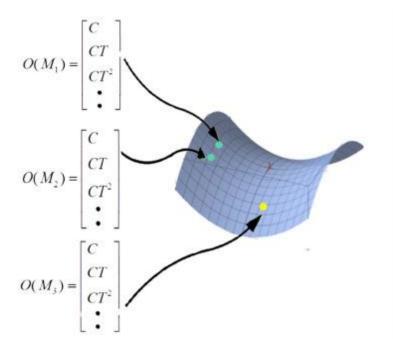


• Grassmann流形上的聚类: 数据表示

线性动态系统(Linear Dynamic System)

$$\begin{cases} y(t) = Cs(t) + w(t) \\ s(t+1) = Ts(t) + v(t) \end{cases}$$

$$[C^T, (CT)^T, \cdots, (CT^{L-1})^T]^T \in \mathbb{R}^{dL \times p} \quad \text{o(M_s) = } \begin{bmatrix} c \\ CT \\ CT^2 \end{bmatrix}$$



Yongli Hu, Peixin Ning, Boyue Wang, Yun Wei, Yanfeng Sun, Junbin Gao and Baocai Yin. Multi-view Time Series Clustering via Linear Dynamic Systems and Product Grassmann Manifolds. *IEEE Transactions on Cybernetics (TCYB)*, under review



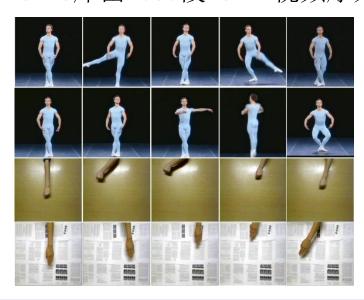




• Grassmann流形上的聚类

动作行为聚类(单视)

Ballet库由713段视频序列构成,包含3个人的8种复杂的芭蕾动作。 SKIG库由1080段RGB-D视频序列构成,包含6个人的10种手势。



Datasets Methods	Ballet	SKIG
LRR	0.2819	_
SSC	0.2903	_
SMCE	0.5105	0.4611
LS3C	0.4222	0.4148
SLRR	0.5316	0.3907
SCGSM	0.5877	0.3704
GLRR-F	0.5905	0.5056
LGLRR	0.6087	0.5185















- 同构乘积流形上的聚类(多视)
 - 1)东直门行为数据库





摄像机 2



摄像机3













- 同构乘积流形上的聚类(多视)
 - 1)东直门行为数据库

Camera Numbers Methods	3	2
PGLRR	0.8352	0.9176
LapPGLRR	0.8352	0.9176
GLRR-F	0.7912	0.7912
SCGSM	0.6264	0.6648
SMCE	0.6154	0.4890
LS3C	0.4890	0.4890
LRR+IDT	0.5824	0.5659
K-means+IDT	0.6758	0.6758
SPC+IDT	0.4176	0.3187
LRR+LBP-TOP	0.7802	0.7802
K-means+LBP-TOP	0.5275	0.7588
SPC+LBP-TOP	0.4176	0.4176











- 同构乘积流形上的聚类 (多视)
 - 2) 多视角行为数据库-ACT42



摄像机 4













• 同构乘积流形上的聚类

2) 多视角行为数据库-ACT42

Cluster Numbers	14	7
Methods		
PGLRR	0.4745	0.7687
LapPGLRR	0.4728	0.7823
GLRR-F	0.4575	0.6701
SCGSM	0.3656	0.4966
SMCE	0.4507	0.5748
LS3C	0.4422	0.5442
LRR+IDT	0.3425	0.3374
K-means+IDT	0.3333	0.4479
SPC+IDT	0.1446	0.2883
LRR+LBP-TOP	0.1446	0.2483
K-means+LBP-TOP	0.1327	0.2177
SPC+LBP-TOP	0.1429	0.1429





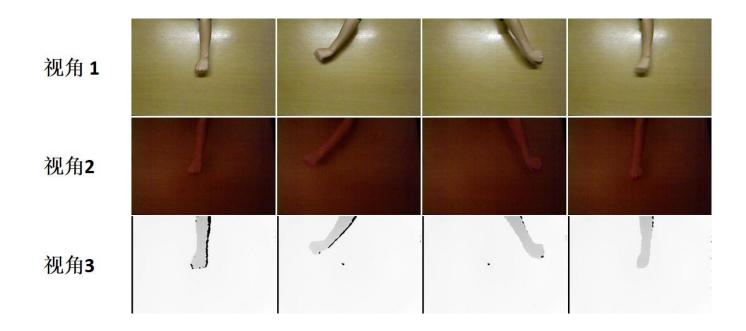








- 同构乘积流形上的聚类(多视)
 - 3) 多视手部动作数据库SKIG













• 同构乘积流形上的聚类(多视)

3) 多视手部动作数据库SKIG

Data Type Methods	light+depth	light+dark	dark+depth	light+dark+depth
PGLRR	0.5907	0.6000	0.6833	0.6315
LapPGLRR	0.6537	0.6870	0.6981	0.6685
GLRR-F	0.5685	0.5185	0.6148	0.5944
SCGSM	0.4093	0.4667	0.5056	0.4296
SMCE	0.4481	0.4130	0.6389	0.5796
LS3C	0.4907	0.3722	0.6333	0.5833
LRR+IDT	0.5463	0.5963	0.6019	0.5963
K-means+IDT	0.4685	0.4759	0.6426	0.5407
SPC+IDT	0.1000	0.2000	0.2000	0.4000
LRR+LBP-TOP	0.222	0.2167	0.2352	0.2056
K-means+LBP-TOP	0.1704	0.1444	0.1870	0.1626
SPC+LBP-TOP	0.1000	0.2000	0.1000	0.1009















• 异构乘积流形上的聚类(多视)

Methods	Input data for different methods
LogELRR	$\mathbf{X} \in \mathcal{S}^d_{++}$
KSSCR	$\mathbf{X} \in \mathcal{S}^d_{++}$
SCGSM	$\mathbf{X} \in \mathcal{G}(p,d)$
FGLRR	$\mathbf{X} \in \mathcal{G}(p,d)$
$\overline{\mathrm{PGLRR}^a}$	$\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2 \in \mathcal{G}(p,d)$ base on Hog and Gabor
	features, respectively.
PGLRR^b	$\mathbf{X}^1 \in \mathcal{S}^n_{++} \text{ and } \mathbf{X}^2 \in \mathcal{G}(p,d)$
AFHM	$\mathbf{X}^1 \in \mathcal{S}^n_{++} \text{ and } \mathbf{X}^2 \in \mathcal{G}(p,d)$











• 异构乘积流形上的聚类(多视)

	Methods	UCF Sport	Ballet		1 3 P	BUPA	AN AN
	SCGSM	52.67	47.16	 		G///0=	t too lat
Single	LogELRR	65.33	33.31	Manch	\ Manc		1 1
	KSSCR	52.00	34.14	2325	ESS ROYLA	alethiaia!	5395
	FGLRR	72.67	59.90		0	No.	60
Multiple	$PGLRR^a$	70.67	49.38				
	$PGLRR^b$	66.00	37.40	gertylmaga	gertyll	gerry	germage
Proposed	AFHM	74.67	60.80	669-60	669-60	669-60	669-60









4. 聚类应用





• 其它聚类应用



DynTex++



Traffic Highway

Traffic Highway

Traffic Highway

ETH80



Feret







下一步的工作





- 流形上的学习 vs. 流形学习
- 异构跨模态的流形低秩表示模型
- 流形上的深度低秩表示模型
- 基于图网络的流形低秩表示模型





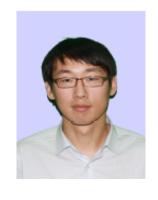




主要合作者











Dr. Xinglin Piao piaoxl@pcl.ac.cn



Prof. Yanfeng Sun yfsun@bjut.edu.cn



Prof. Baocai Yin ybc@bjut.edu.cn



Prof. Junbin Gao junbin.gao@sydney.edu.au









谢谢关注!

敬请指正!

胡永利 huyongli@bjut.edu.cn





